

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$3.1. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 1 - \sin x. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u(x, y)|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y(x, y)|_{y=\sin x} = \sin x. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x) u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x) u_y = 0, \\ u(x, y)|_{y=\cos x} = 0, \quad u_y(x, y)|_{y=\cos x} = e^{-x^2} \cos x. \end{cases}$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$3.4. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin(\omega x), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2(t^2 - x^2), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + \cos x. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin(\omega t), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок змішаних задач для хвильового рівняння на відрізку:

$$\begin{aligned}
 3.12. \quad & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad u(0, t) = u_x(l, t) = 0. \end{cases} \\
 3.13. \quad & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x, \quad u_x(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \\
 3.14. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 49u_{xx}, \\ u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x, \quad u_t(x, 0) = 21\pi \sin 3\pi x, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0. \end{cases} \\
 3.15. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 18\pi \sin 9\pi x, \quad u(0, t) = u_x(3/2, t) = 0. \end{cases} \\
 3.16. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \\ u(x, 0) = x(x - 1/2), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1/2, t) = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійного виконання

Застосовуючи формулу Кірхгофа, знайти розв'язки задач Коші для хвилових рівнянь у просторі:

$$\begin{array}{ll} 4.1. \begin{cases} u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x - 2y + z)^2. \end{cases} & 4.4. \begin{cases} u_{tt} = 25(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases} \\ 4.2. \begin{cases} u_{tt} = 9(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x + y - z)^2. \end{cases} & 4.5. \begin{cases} u_{tt} = (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2xyz, \\ u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad u_t|_{t=0} = 1. \end{cases} \\ 4.3. \begin{cases} u_{tt} = 16(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2). \end{cases} & 4.6. \begin{cases} u_{tt} = (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + e^t, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \end{array}$$

Завдання для самостійного виконання

Скориставшись формулою Пуассона, знайти розв'язки задач Коші для хвильових рівнянь на площині:

$$4.7. \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (2x + y)^2. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} u_{tt} = 2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 2x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x - y)^2. \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} u_{tt} = (u_{xx} + u_{yy}) + 2, \\ u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = y. \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} u_{tt} = 3 (u_{xx} + u_{yy}) + x^3 + y^3, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = y^2. \end{cases}$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати змішані задачі для хвильового рівняння у прямокутнику:

$$4.13. \begin{cases} u_{tt} = 9\Delta u, \\ u(x, y, 0) = xy(4 - x)(5 - y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=4} = u|_{y=5} = 0. \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u, \\ u(x, y, 0) = x(3 - x)(4 - y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=3} = u|_{y=4} = 0. \end{cases}$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати змішані задачі для хвильового рівняння у колі:

$$\begin{aligned} 4.15. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 3\Delta u, & 0 \leq r < 23, \\ u(r, 0) = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{r}{23} \right)^2 \right), & u_t(r, 0) = 0, \quad u(23, t) = 0. \end{cases} \\ 4.16. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 2\Delta u, & 0 \leq r < 24, \\ u(r, 0) = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{r}{24} \right)^2 \right), & u_t(r, 0) = 0, \quad u(24, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$